OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 02.02.2025 –

Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

Se consideră relația:

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + 5} + \sqrt{y^6 - 16y^3 + 68} + \left|x^2 - y + z - \sqrt{2}\right| = 3$$

4p a)Determinați numerele reale pozitive *x, y* și *z* care verifică relația.

3p b)Verificați dacă numărul $\left(\frac{x+z}{y}\right)^{2025}$ este rațional.

***

Soluție:

a)$\sqrt{(x^2-2)^2+1} + \sqrt{(y^3-8)^2+4} + \left|x^2 - y + z - \sqrt{2}\right| = 3$ 1p

Cum $\sqrt{(x^2-2)^2+1} \geq 1$, $\sqrt{(y^3-8)^2+4} \geq 2$ și $\left|x^2 - y + z - \sqrt{2}\right| \geq 0$ 1p

obținem $x^2 - 2 = 0$ și $y^3 - 8 = 0$ deci $x = \sqrt{2}$, $y = 2$ și $z = \sqrt{2}$ 2p

b) $\left(\frac{x+z}{y}\right)^{2025} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^{2025} = \left(\sqrt{2}\right)^{2025} =$ 2p

$2^{1012}\sqrt{2}$ care este irațional. 1p

***

SUBIECTUL 2

Fie ABCDEF o prismă triunghiulară regulată și punctele M, N, P pe muchiile AD, BE respectiv CF, astfel încât $MN \parallel AB$. Fie $\{T\} = AP \cap CM$ și $\{S\} = BP \cap CN$. Arătați că :

3p a) $TS \parallel (ABE)$;

4p b)$(FMN) \parallel (ABP)$ dacă și numai dacă $BN = FP$.

***

Soluție:

a) $MN \parallel AB, AM \parallel BN \Rightarrow AMBN$ este dreptunghi $\Rightarrow AM \equiv BN$ 1p

$$AM \parallel CP \Rightarrow \Delta TAM \sim \Delta TPC \Rightarrow \frac{TA}{TP} = \frac{AM}{PC} = \frac{TM}{TC}$$ 1p

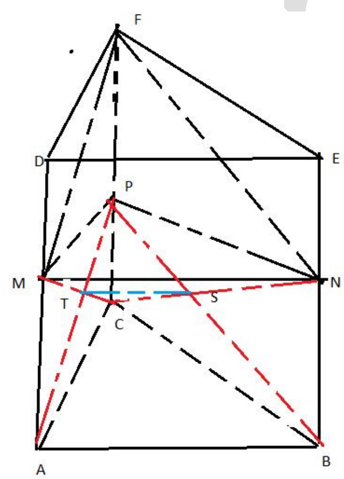
$$BN \parallel CP \Rightarrow \Delta SBN \sim \Delta SPC \Rightarrow \frac{SB}{SP} = \frac{BN}{PC} = \frac{SN}{SC}$$ 1p

$\frac{AM}{PC} = \frac{BN}{PC} \Rightarrow \frac{TA}{TP} = \frac{SB}{SP}$ $\Rightarrow$ conform reciprocei teoremei lui Thales $TS \parallel AB, AB \subset (ABE), TS \not\subset (ABE) \Rightarrow TS \parallel (ABE)$ 1p

b) $(FMN) \parallel (PAB) \Rightarrow FN \parallel BP$ (deoarece sunt drepte coplanare), FP $\parallel BN \Rightarrow BNFP$ este paralelogram $\Rightarrow BN \equiv FP$ 1p

$BN = FP$, FP $\parallel BN \Rightarrow BNFP$ este paralelogram $\Rightarrow FN \parallel BP$ 1p

$FN \parallel BP, BP \subset (PAB), FN \not\subset (PAB) \Rightarrow FN \parallel (ABP)$, MN, FN $\parallel (ABP), MN, FN \subset (FMN), MN \cap FN = \{N\} \Rightarrow) (FMN) \parallel (PAB)$ 1p



SUBIECTUL 3

Aflați numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{2025} \in (0,1]$ pentru care

$$\frac{2024x_1+1}{x_1} + \frac{2024x_2+1}{x_2} + \ldots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} = 2025^2$$

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$\frac{2024x_1+1}{x_1} + \frac{2024x_2+1}{x_2} + \ldots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} = 2025^2 \Leftrightarrow \frac{2024x_1+1}{x_1} - 2025 + \frac{2024x_2+1}{x_2} - 2025 + \ldots + \frac{2024x_{2025}+1}{x_{2025}} - 2025 = 0 \Leftrightarrow$ 2p

$\frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2} + \ldots + \frac{1-x_{2025}}{x_{2025}} = 0$ 2p

Dar $x_1, x_2, \ldots, x_{2025} \in (0,1] \Rightarrow \frac{1-x_1}{x_1} \geq 0, \frac{1-x_2}{x_2} \geq 0, \ldots, \frac{1-x_{2025}}{x_{2025}} \geq 0$ 2p

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{2025} = 1$$ 1p

SUBIECTUL 4

Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA’B’C’D’ cu AB=$6\sqrt{2}$cm, BC=6cm și AA’=$6\sqrt{3}$cm iar punctul E este mijlocul muchiei A’B’.

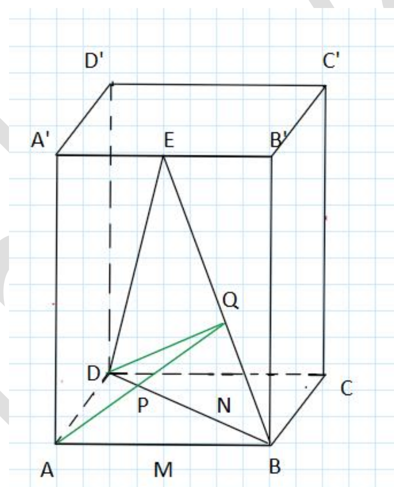
3p a)Calculați aria triunghiului EBD;

2p b)Calculați distanța de la punctul A la planul (EBD);

2p c)Calculați tangenta unghiului plan determinat de planele (EBD) și (A’AB).

Profesor Anton Negrilă

Soluție:



a)Construim $AQ \perp EB$, $Q \in EB$;

$EB = 3\sqrt{14}$ cm 1p

$AQ \cdot EB = EM \cdot AB$ deci $AQ = \frac{12\sqrt{21}}{7}$cm 1p

T Pitagora în ΔADQ avem $DQ = \frac{6\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$cm, deci aria lui EBD este $9\sqrt{38}$cm. 1p

b)d(A,(EBD)) este înălțimea din A a triunghiului DAQ 1p

d(A,(EBD))=$\frac{AD \cdot AQ}{DQ} = \frac{12\sqrt{57}}{19}$cm. 1p

c)$\sphericalangle\big((EBD),(A'AB)\big) = \sphericalangle(AQ, DQ) = \sphericalangle AQD$ 1p

tg$\sphericalangle$AQD=$\frac{AD}{AQ} = \frac{\sqrt{21}}{6}$ 1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.